# Cvičenie č. 7b Minimalizácia vyjadrenia booleovskej funkcie Karnaughovou mapou

## Náplň a ciele cvičenia

Cieľom cvičenia je s využitím Karnaughovych máp určiť iredundantnú disjunktívnu normálnu formu (IDNF), iredundantnú konjunktívnu normálnu formu (IKNF) a následne minimálnu disjunktívnu normálnu formu (MDNF) a minimálnu konjunktívnu normálnu formu (MKNF) booleovskej funkcie.

## Riešená úloha

Booleovská funkcia je zapísaná vo forme množinového zápisu

*f(a,b,c,d) = {0,1,3,5,6,7,14 (8,15)}*

**Riešenie:**

Pre určenie iredundantnej disjunktívnej normálnej formy (IDNF) resp. iredundantnej konjunktívnej normálnej formy (IKNF) rozložíme funkciu na súčet prostých implikantov resp. súčin prostých implicentov. Prosté implikanty resp. implicenty je možné získať tak, že sa algebraicky vyjadria najväčšie pravidelné konfigurácie jednotiek resp. núl nachádzajúce sa v Karnaughovej mape.

### 3.4.1. Iredundantná disjunktívna normálna forma (IDNF)

Prvým krokom je prepísanie booleovskej funkcie z jej množinového zápisu do zápisu vo forme Karnaughovej mapy, tak ako to ukazuje obr. 19.



Obr. 19 Karnaughova mapa funkcie *f(a,b,c,d)* s vyznačením kontúr všetkých prostých implikantov

Následne je potrebné nájsť všetky prosté implikanty funkcie a to tak, že sa nájdu najväčšie pravidelné konfigurácie jednotiek, ktoré sú týmito implikantmi poryté. Kontúry prostých implikantov sú vyznačené na obr. 19.

Ako vidno na obr. 19, v Karnaughovej mape je možné nájsť štyri najväčšie pravidelné konfigurácie jednotiek (Niektoré aj so zahrnutím políčok, kde nie je hodnota funkcie definovaná a teda obsahujú znak *x*. Tieto políčka sa na účely hľadania prostých implikantov pokladajú za políčka obsahujúce hodnotu *1,* ak je to vhodné pre sformovanie väčšej pravidelnej konfigurácie. V opačnom prípade je x považované za 0).

Prvá najväčšia pravidelná konfigurácia zahŕňa políčka *0* a *1*, to znamená, že tvorí pravidelnú konfiguráciu zloženú z dvoch políčok obsahujúcich hodnotu *1*. Ďalšia konfigurácia zahŕňa políčka *0* a *8*, pričom táto pravidelná konfigurácia zahŕňa *1* v políčku *0* a *x* v políčku *8,* ktoré je považované pre tieto účely za hodnotu 1. Tretia konfigurácia zahŕňa políčka *1, 3, 5, 7*, čo znamená, že tvorí pravidelnú konfiguráciu zloženú z až štyroch jednotiek. Štvrtá konfigurácia zahŕňa políčka *6, 7, 14, 15*. V políčku *15* nemá funkcia definovanú hodnotu, je ho však možné zahrnúť do prostého implikantu a tak získať pravidelnú konfiguráciu zloženú zo štyroch políčok. Aby bolo možné vytvoriť pravidelnú konfiguráciu zo štyroch políčok, je do implikantu zahrnutá aj jednotka v políčku *7*, ktorá už je pokrytá iným prostým implikantom. Zahrnutím políčok *7* a *15* bolo dosiahnuté, že implikant pokrýva väčšiu pravidelnú konfiguráciu jednotiek ako keby doň boli zahrnuté iba políčka *6* a *14*. To umožní znížiť počet premenných, ktorými je tento implikant vyjadrený v algebraickej forme.

Pri popise pravidelných konfigurácií budeme potom postupovať tak, že každú z nich popíšeme pomocou tých premenných, ktoré majú pre každé políčko zahrnuté v príslušnej konfigurácii zhodnú hodnotu. Naopak, takú premennú, ktorej hodnota sa líši pre rôzne políčka zahrnuté v pravidelnej konfigurácii, nepoužijeme. Každý takýto popis pravidelnej konfigurácie potom predstavuje jeden prostý implikant booleovskej funkcie.

Jednotlivé prosté implikanty možno zapísať v algebraickej forme tak, že

* Políčka 0, 1 zahŕňa prostý implikant $\overline{a}\overline{b}\overline{c}$
* Políčka 0, 8 zahŕňa prostý implikant $\overline{b}\overline{c}\overline{d}$
* Políčka 1, 3, 5, 7 zahŕňa prostý implikant $\overline{a}d$
* Políčka 6, 7, 14, 15 zahŕňa prostý implikant $bc$

Môžeme teda vyjadriť funkciu $f\left(a,b,c,d\right)$ vo forme skrátenej disjunktívnej normálnej formy (SDNF), ktorá predstavuje logický súčet všetkých prostých implikantov určených z Karnaughovej mapy:

$$f\left(a,b,c,d\right)= \overline{a}\overline{b}\overline{c}+\overline{b}\overline{c}\overline{d}+\overline{a}d+bc$$

V SDNF môže byť redundantný, teda nadbytočný, počet prostých implikantov. Aby bola táto SDNF iredundantnou disjunktívnou normálnou formou (IDNF), musí platiť, že nie je možné vynechať žiadny z prostých implikantov z ktorých je zložená, bez toho, aby sa niektoré z políčok obsahujúcich jednotku stalo nepokrytým aspoň jedným prostým implikantom.

Pre určenie IDNF preto začneme testovať, či je možné vynechávať jednotlivé prosté implikanty tak, že napriek ich vynechaniu zostanú všetky políčka obsahujúce jednotku pokryté inými prostými implikantmi tvoriacimi SDNF.

Ak vynecháme prvý prostý implikant $\overline{a}\overline{b}\overline{c}$, jednotka v políčku 0 zostane naďalej pokrytá druhým prostým implikantom $\overline{b}\overline{c}\overline{d}$. Jednotka v políčku 1 zostane naďalej pokrytá tretím prostým implikantom $\overline{a}d$. Získame teda vyjadrenie

$$f\left(a,b,c,d\right)=\overline{b}\overline{c}\overline{d}+\overline{a}d+bc$$

Z takto zapísanej SDNF nie je možné vynechať žiadny ďalší prostý implikant bez toho, aby niektorá z jednotiek neprestala byť pokrytá niektorým z implikantov a každý z implikantov je prostým implikantom. Uvedená SDNF preto predstavuje iredundantnú disjunktívnu normálnu formu (IDNF).

Alternatívne, ak vynecháme z pôvodnej SDNF druhý prostý implikant $\overline{b}\overline{c}\overline{d}$, jednotka v políčku 0 zostane pokrytá prvým prostým implikantom $\overline{a}\overline{b}\overline{c}$. Políčko 8, v ktorom je hodnota funkcie nedefinovaná, teda obsahuje znak X, nemusí byť pokryté žiadnym prostým implikantom. Vynechaním druhého prostého implikantu $\overline{b}\overline{c}\overline{d}$ sa teda nestane, že by niektoré z políčok obsahujúcich hodnotu 1 nebolo pokryté aspoň jedným prostým implikantom. Súčasne platí, že už nie je možné vynechať žiadny ďalší prostý implikant bez toho, aby niektoré z políčok obsahujúcich hodnotu 1 neprestalo byť pokryté aspoň jedným prostým implikantom, preto vyjadrenie

$$f\left(a,b,c,d\right)= \overline{a}\overline{b}\overline{c}+\overline{a}d+bc$$

je iredundantnou disjunktívnou normálnou formou (IDNF).

Súčasne z uvedeného vyplýva, že pre konkrétnu booleovskú funkciu môže existovať viacero iredundantných disjunktívnych normálnych foriem.

### 3.4.2. Minimálna disjunktívna normálna forma (MDNF)

Pre určenie minimálnej disjunktívnej normálnej formy (MDNF) je dôležité určiť všetky IDNF. Tie môžu pozostávať z rôzneho počtu implikantov a tie môžu mať rôzny počet premenných. Možno teda nájsť jednu z IDNF, ktorá je zložená z najmenšieho počtu implikantov a tú označiť ako MDNF. Ak je viac IDNF tvorených rovnakým minimálnym počtom implikantov, je potrebné nájsť tú, kde počet premenných tvoriacich všetky jej implikanty je najnižší a táto potom tvorí MDNF. Ak je viac ako jedna IDNF zložená z najmenšieho počtu implikantov a so zhodným počtom premenných, ktoré tvoria ich implikanty, je možné vybrať ľubovoľnú z nich a označiť ju ako MDNF. Pre riešený príklad platí práve táto posledná možnosť, preto je možné určiť ako MDNF prvú alebo druhu získanú IDNF.

### 3.4.3. Iredundantná konjunktívna normálna forma (IKNF)

Prvým krokom je prepísanie booleovskej funkcie z jej množinového zápisu do zápisu vo forme Karnaughovej mapy, s vyznačením prostých implicentov, tak ako to ukazuje obr. 20.



Obr. 20 Karnaughova mapa funkcie *f(a,b,c,d)* s vyznačením kontúr všetkých prostých implicentov

V Karnaughovej mape je možné nájsť 5 pravidelných konfigurácií núl (niektoré so zahrnutím políčok, kde nie je hodnota funkcie definovaná, pretože na účely hľadania prostých implicentov sa tieto políčka môžu ale nemusia pokladať za políčka, kde má funkcia hodnotu 0, a to podľa toho, či umožnia nájsť väčšiu pravidelnú konfiguráciu 0 alebo nie), pričom tieto konfigurácie možno zapísať vo forme prostých implicentov tak, že:

* Políčka 2, 10 sú zahrnuté v implicente s vyjadrením $(b+\overline{c}+d)$
* Políčka 4, 12 sú zahrnuté v implicente s vyjadrením $(\overline{b}+c+d)$
* Políčka 8, 9, 10, 11 sú zahrnuté v implicente s vyjadrením $(\overline{a}+b)$
* Políčka 8, 9, 12, 13 sú zahrnuté v implicente s vyjadrením $(\overline{a}+c)$
* Políčka 9, 11, 13, 15 sú zahrnuté v implicente s vyjadrením $(\overline{a}+\overline{d})$

S využitím vyššie uvedených implicentov možno zapísať skrátenú konjunktívnu normálnu formu

$$f\left(a,b,c,d\right)=\left(b+\overline{c}+d\right) . \left(\overline{b}+c+d\right) . \left(\overline{a}+b\right) . \left(\overline{a}+c\right) . (\overline{a}+\overline{d})$$

Táto skrátená forma však ešte nie je iredundantná, pretože aj po vynechaní tretieho prostého implicentu $\left(\overline{a}+b\right)$ sú stále všetky políčka, kde má funkcia hodnotu 0 pokryté. Preto získame iredundantnú konjunktívnu normálnu formu (IKNF) vynechaním tohto prostého implicentu

$$f\left(a,b,c,d\right)=\left(b+\overline{c}+d\right) . \left(\overline{b}+c+d\right) . \left(\overline{a}+c\right) . (\overline{a}+\overline{d})$$

Ďalšou alternatívou, ako je možné získať IKNF, je z pôvodného vyjadrenia vynechať štvrtý prostý implicent $(\overline{a}+c)$

$$f\left(a,b,c,d\right)=\left(b+\overline{c}+d\right).\left(\overline{b}+c+d\right).\left(\overline{a}+b\right).(\overline{a}+\overline{d})$$

Poslednou alternatívou, ako je možné získať IKNF, je z pôvodného vyjadrenia vynechať piaty prostý implicent $(\overline{a}+\overbar{d})$

$$f\left(a,b,c,d\right)=\left(b+\overline{c}+d\right).\left(\overline{b}+c+d\right).\left(\overline{a}+b\right).\left(\overline{a}+c\right)$$

### 3.4.4. Minimálna konjunktívna normálna forma (MKNF)

Pre určenie minimálnej konjunktívnej normálnej formy (MKNF) je dôležité určiť všetky IKNF. Tie môžu pozostávať z rôzneho počtu implicentov a tie môžu mať rôzny počet premenných. Možno teda nájsť jednu z IKNF, ktorá je zložená z najmenšieho počtu implicentov a tú označiť ako MKNF. Ak je viac IKNF tvorených rovnakým minimálnym počtom implicentov, je potrebné nájsť tú, kde súčet premenných tvoriacich všetky jej implicenty je najnižší a táto potom tvorí MKNF. Ak je viac ako jedna IKNF zložená z najmenšieho počtu implicentov a so zhodným počtom premenných, ktoré tvoria ich implicenty, je možné vybrať ľubovoľnú z nich a označiť ju ako MKNF. Pre riešený príklad platí práve táto posledná možnosť, preto je možné určiť ako MKNF ľubovoľnú z troch získaných IKNF.

## Neriešené úlohy

1. Určte IDNF a MDNF neúplne určenej booleovskej funkcie *f(a,b,c,d) = {0,3,7,14 [2,8,11]}*.
2. Určte IDNF a MDNF úplne určenej booleovskej funkcie *f(a,b,c,d) = {0,1,2,3,9,10,15}*.
3. Určte IDNF a MDNF neúplne určenej booleovskej funkcie *f(a,b,c) = {0,2,4 (6)}*.
4. Určte IDNF a MDNF neúplne určenej booleovskej funkcie *f(a,b,c) = {0,2,4,6 (3,5)}*.
5. Určte IDNF a MDNF neúplne určenej booleovskej funkcie *f(a,b,c,d) = {8,9,10,11,12,14 [7,13]}*.
6. Určte IKNF a MKNF neúplne určenej booleovskej funkcie *f(a,b,c,d) = {0,3,7,14 [2,8,11]}*.
7. Určte IKNF a MKNF úplne určenej booleovskej funkcie *f(a,b,c,d) = {0,1,2,3,9,10,15}*.
8. Určte IKNF a MKNF neúplne určenej booleovskej funkcie *f(a,b,c) = {0,2,4 (6)}*.
9. Určte IKNF a MKNF neúplne určenej booleovskej funkcie *f(a,b,c) = {0,2,4,6 (3,5)}*.
10. Určte IKNF a MKNF neúplne určenej booleovskej funkcie *f(a,b,c,d) = {8,9,10,11,12,14 [7,13]}*.

## Kontrolné otázky

1. Aký je rozdiel medzi skrátenou a iredundantnou disjunktívnou normálnou formou?
2. Je výhodnejšie hľadať IDNF alebo IKNF booleovskej funkcie?
3. Čo je to prostý implikant a prostý implicent?
4. Ako súvisí počet políčok v pravidelnej konfigurácii Karnaughovej mapy s počtom premenných, ktoré tvoria prostý implikant algebraicky popisujúci túto konfiguráciu?